

# Rectification métrique de l'image d'un marqueur à contour circulaire à partir d'une caméra calibrée par défaut

Damien MARIYANAYAGAM, Pierre GURDJOS, Sylvie CHAMBON,  
Vincent CHARVILLAT, Florent BRUNET<sup>†</sup>

Université de Toulouse, IRIT-ENSEEIH, Toulouse  
<sup>†</sup> Ubleam, Toulouse

Projet « INVISIO » financé en tant que P.O. FEDER-Région Midi-Pyrénées/Occitanie 2014-2020

damien.mariyanayagam@enseeih.fr

## Résumé

Des marqueurs plans spécialisés (par exemple, le *bleam* de la société Ubleam) offrent aujourd'hui de nombreuses applications industrielles en permettant notamment à un opérateur de localiser et d'identifier un équipement dans un environnement de travail. Un des enjeux actuels est de pouvoir à la fois réduire la taille des marqueurs et d'accroître la distance d'acquisition. La rectification métrique de l'image d'un marqueur plan est une tâche nécessaire dans n'importe quelle application de ce type. Une nouvelle méthode de calcul des paramètres d'une telle rectification à partir d'un marqueur à contour circulaire est proposée dans cet article. Dans les méthodes existantes, ce calcul nécessite en général la connaissance supplémentaire soit des paramètres de calibrage, soit de l'image d'un autre cercle coplanaire. Notre contribution consiste à proposer l'utilisation d'un seul cercle en introduisant des paramètres de caméra « par défaut » avec l'idée d'utiliser les incertitudes sur ces connaissances afin de réduire l'espace de recherche de solutions. Nous montrons qu'avec l'image du contour d'un marqueur circulaire dont la résolution est « suffisamment » grande dans l'image, il est possible d'obtenir une précision de rectification qui soit équivalente à celle obtenue avec un calibrage hors ligne précis de la caméra (obtenu avec OpenCV). En dessous d'une certaine résolution, on obtient des précisions identiques que l'on prenne un calibrage par défaut ou un calibrage hors ligne.

## Mots Clef

Rectification métrique, Détection d'ellipses, Marqueur Fiduciaire.

## Abstract

Specific markers ( ex : *bleam* ) offers various applications in industry where they can help operators to locate and identify equipment in a specific environment. One of the current challenge is to be able to reduce the size of the

marker and increase its acquisition distance. Metric rectification of the image of its plane is a mandatory step for any application. A new method for computing its parameter based on circular marker is proposed in this paper. Existing methods require additional knowledge for this computation such as calibration parameters or coplanar circles. Our contribution consist in using only one ellipse and default camera parameters with the idea to use their respective uncertainties to reduce the solution search space. We show that the image of the circular marker with a sufficient size in image can be rectified with the same level of accuracy than the one obtained with an offline calibration (using OpenCV). Below a certain resolution, the accuracy obtained is similar whether we use a default calibration or a more accurate calibration made offline.

## Keywords

Metric rectification, ellipse detection, fiducial marker.

## 1 Introduction

Dans cet article, on s'intéresse au calcul des paramètres de rectification métrique d'une surface plane sur laquelle figure un marqueur circulaire. Cette rectification nécessite un minimum de quatre paramètres qui permettent de déterminer la structure euclidienne du plan, c'est-à-dire de retrouver le modèle d'apparence du marqueur à une similitude plane près (rotation, translation et homothétie du plan de support).

Les marqueurs considérés ici permettent la reconnaissance d'un objet rigide (machine etc.) dans un environnement industriel et la détermination de la pose relativement à la caméra. Les marqueurs fiduciaires simplifient le problème en proposant une bonne initialisation, c'est à dire une estimation de la pose fiable et assez précise pour un coût calculatoire très faible. Si aujourd'hui beaucoup d'approches se concentrent sur l'apprentissage profond, les marqueurs restent indispensables pour une fiabilité de détection et d'iden-

tification grâce à la richesse de l'information géométrique qu'ils fournissent. Nous mettons l'accent sur le fait que ces marqueurs doivent être de taille réduite mais doivent pouvoir être scannés à une distance relativement importante, la FIGURE 1 nous donne une bonne idée du cadre d'utilisation visé.



FIGURE 1 – Lecture d'un marqueur bleam

De nombreuses solutions de marqueurs fiduciaires existent comme les ARTags, QR codes ou les marqueurs Vuforia et se basent sur la détection d'un contour quadrilatérale ou plus généralement polygonale. Nous nous intéressons dans cet article plus précisément aux marqueurs circulaires, ceux-ci présentent pour la plupart deux cercles concentriques (Marqueur proposé par Pagani et al. [10], RuneTag [1]) En effet ces marqueurs présentent des propriétés géométriques intéressantes comme notamment la robustesse à l'occultation voire au flou de mouvement [3].

Un exemple de ce type de marqueur est montré sur la FIGURE 1, ce marqueur nommé *bleam* est produit par la société Ubleam. Le *bleam* encode l'information géométrique nécessaire à la rectification grâce à deux cercles composant sa couronne colorée extérieure.

Les méthodes qui calculent la rectification métrique à partir d'un cercle se distinguent selon si la caméra est calibrée ou non. Lorsque la caméra n'est pas calibrée, il existe une double infinité de solutions, c'est-à-dire une famille de solutions dépendant de deux paramètres inconnus que l'on peut interpréter géométriquement comme étant les coordonnées de l'image du centre du cercle. Cette information peut être retrouvée à l'aide d'autres primitives (image d'un autre cercle, de droites parallèles ou perpendiculaires etc ...). Dans le cas calibré, les auteurs des méthodes insistent sur l'importance de la précision à la fois de la détection, de l'ajustement de l'ellipse et du calibrage de la caméra [1]. Malheureusement, dans les conditions extrêmes que nous voulons considérer quand la surface plane est très éloignée de la caméra, il n'est ni possible de fournir une étape de calibrage, ni possible de garantir ce niveau de précision pour l'ellipse. Alors, comment trouver une solution précise à partir d'une détection d'ellipse qui ne l'est pas et sans connaissance précise sur la caméra? Notre approche se fonde sur des tendances nouvelles, rendues opérationnelles par les capacités de calcul des ordinateurs récents, où, à partir d'une connaissance incertaine sur les pa-

ramètres de l'ellipse détectée et un calibrage « par défaut », l'idée est de proposer des candidats pour les deux coordonnées de l'image du centre du cercle. Les candidats peuvent par la suite être « notés » selon un critère photométrique de rectification et le meilleur est conservé. Nous montrons dans ce travail comment restreindre grandement l'espace des candidats à évaluer en utilisant les matrices de covariance associées aux paramètres de calibrage et de l'ellipse. La section 2 exposera le problème de façon formelle et la solution et l'algorithme proposée sera présentée dans la section 3. Enfin, nous présenterons notre implémentation et les résultats des tests dans la section 4.

## 2 Formulation du problème

Dans cette partie nous exposons le problème de rectification métrique auquel nous nous intéressons lorsqu'un marqueur à contour circulaire est utilisé. Nous distinguerons deux façons de résoudre ce problème selon si l'appareil photographique est calibré ou non.

**Notations.** Un vecteur est représenté par un caractère gras, par exemple  $\mathbf{v}$ , et une matrice par un caractère sans empattement (de typologie *sans serif*), par exemple  $M$ . La composante  $j$  du vecteur  $\mathbf{v}$  sera notée  $v_j$  et l'élément  $(j, k)$  de la matrice  $M$  sera noté  $M_{jk}$ . Les vecteurs en majuscules contiennent des coordonnées cartésiennes et ceux en minuscules des coordonnées homogènes. Afin de simplifier l'écriture, on utilisera l'opérateur  $\sim$  pour désigner l'égalité projective.

On note également  $[\mathbf{v}]_{\wedge}$  la matrice antisymétrique telle que  $\mathbf{v} \wedge \mathbf{w} = [\mathbf{v}]_{\wedge} \mathbf{w}$ ,  $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbb{R}^3$ .

Enfin,  $SO(3)$  désigne le groupe des rotations dans l'espace tridimensionnel euclidien et  $\mathcal{S}_3(\mathbb{R})$  le sous-ensemble des matrices réelles d'ordre 3 formé des matrices symétriques.

**Modèle de caméra.** L'appareil photographique utilisé est celui d'un *smartphone* et nous l'appellerons caméra. On utilise le modèle géométrique du sténopé au sein de ce document. Cela signifie entre autres qu'on ne prendra pas en compte les aberrations géométriques et la distorsion optique que génèrent la caméra.

Soit une caméra dont la pose est définie par le couple  $(R, \mathbf{t})$  dans le repère de la scène, avec  $R \in SO(3)$  et  $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^3$ . Soit un plan 3D  $\Pi$ . Il existe une homographie, c'est-à-dire un morphisme projectif bijectif de dimension 2, du plan  $\Pi$  vers le plan de l'image. Lorsque  $\Pi$  a pour équation  $z = 0$  dans le repère de la scène, la matrice de cette homographie est de la forme

$$H = KR^T (\mathbf{e}_1 \mid \mathbf{e}_2 \mid -\mathbf{t}) \quad (1)$$

où  $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$  sont les vecteurs de la base canonique et  $K$  désigne la matrice de calibrage

$$K = \begin{pmatrix} f_x & \alpha & u_0 \\ 0 & f_y & v_0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2)$$

dont les paramètres sont les distance focales (en pixels)  $f_x$  et  $f_y$ , selon les axes  $x$  et  $y$  du plan de l'image, le facteur

d'obliquité  $\alpha$  et les coordonnées cartésiennes  $(u_0, v_0)$  du point principal. Nous pouvons constater qu'en pratique le facteur  $\alpha$  est souvent très proche de zéro, il est donc raisonnable de le fixer à zéro afin de simplifier notre modèle.

**Rectification métrique.** Le calcul d'une rectification métrique de l'image associée à un plan  $\Pi$  consiste à retrouver l'homographie  $H$  à une similitude plane près dans  $\Pi$ . Plus précisément, on recherche une matrice de la forme  $M \sim SH^{-1}$ , où  $S$  est la matrice d'une similitude plane arbitraire de la forme  $S = \begin{pmatrix} sA & \mathbf{b} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}$ , avec  $s \in \mathbb{R}^*$ ,  $A \in SO(2)$  et  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^2$ .

**Conique.** Une conique du plan, dont l'équation est  $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$  en coordonnées cartésiennes, peut se représenter sous la forme d'une matrice symétrique  $C \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$  :

$$C = \begin{pmatrix} a & b/2 & d/2 \\ b/2 & c & e/2 \\ d/2 & e/2 & f \end{pmatrix} \quad (3)$$

En coordonnées homogènes, via le vecteur  $\mathbf{x} = (x, y, 1)^\top$ , l'équation de la conique s'écrit alors sous la forme matricielle  $\mathbf{x}^\top C \mathbf{x} = 0$ . L'image de toute conique  $C$  par une homographie  $H$  a pour matrice  $C' = H^{-\top} C H^{-1}$ . Toute matrice réelle d'ordre 3 définit une conique projective du plan. Lorsque la matrice est de rang 2, la conique est dite dégénérée et correspond à une paire de droites.

**Marqueur *bleam*.** On appellera *bleam* tout marqueur plan constitué d'une couronne circulaire contenant un motif situé à l'intérieur de celle-ci. Cette couronne est constituée de deux cercles concentriques, dits cercle externe et cercle interne. On appelle ellipse externe et ellipse interne les images par projection centrale des cercles externe et interne respectivement. On note  $\mathbf{N}$  le vecteur de la normale au plan de support du marqueur dans le repère cartésien 3D de la caméra. Il est à noter que le vecteur homogène  $\mathbf{v}$  de la ligne de fuite de ce plan vérifie

$$\mathbf{v} \sim K^{-\top} \mathbf{N} \quad (4)$$

et que le vecteur homogène  $\mathbf{x}_c$  de l'image du centre commune aux deux cercles vérifie

$$\mathbf{x}_c \sim E^{-1} \mathbf{v} \quad (5)$$

où  $E$  désigne la matrice de l'ellipse externe ou interne.

## 2.1 Problème

On suppose disposer d'un modèle d'apparence du *bleam*, par exemple sous la forme d'une image fronto-parallèle de celui-ci qu'on peut obtenir à partir d'un scan du marqueur. Nous partons du postulat (vérifié par des expériences préliminaires) que, à grande distance d'acquisition, il est très difficile de détecter l'image du cercle interne de la couronne du *bleam*. Et que lorsqu'on y arrive, l'ajustement de l'ellipse correspondante est trop imprécise et instable.

Dans ce qui suit, cercle et ellipse font référence au cercle et à l'ellipse externes du *bleam*. Sauf à titre de comparaison, nous ignorons le cercle et l'ellipse internes du *bleam*.

**Formulation.** Connaissant les paramètres de l'ellipse externe  $E \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ , image d'un cercle  $C \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$ , il s'agit de trouver un point  $\mathbf{x}$  à l'intérieur de  $E$ , l'image du centre dans le cas idéal, telle que l'image du *bleam* rectifiée métriquement à partir d'une homographie paramétrée par  $\mathbf{x}$  et  $E$  cf. équation (9) soit cohérente d'un point de vue photométrique avec le modèle d'apparence du *bleam*.

**Formulation alternative.** Il est à noter que des approches légèrement différentes peuvent être obtenues en considérant la normale  $\mathbf{N}$  ou la ligne de fuite  $\mathbf{v}$  au lieu de l'image du centre  $\mathbf{x}_c$ .

## 2.2 Résultats préliminaires

**Cas d'une caméra calibrée.** Nous rappelons tout d'abord quelques résultats dans le cas d'une caméra calibrée, c'est-à-dire lorsque  $K$  est connue. Soit  $E$  la matrice de l'ellipse externe.

- Connaissant  $K$  et  $E$ , le problème du calcul de la normale  $\mathbf{N}$  a deux solutions qui sont [4] :

$$\mathbf{N} \sim \mathbf{v} \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_3}} \\ \pm \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_3}{\lambda_1 - \lambda_3}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6)$$

où  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sont les valeurs propres (ordinaires) de  $E$  triées en ordre descendant et  $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_1 | \mathbf{V}_2 | \mathbf{V}_3]$  la matrice des trois vecteurs propres correspondants. L'image du centre peut alors être calculée à partir de (4) et (5).

- Connaissant  $K$  et  $\mathbf{N}$ , toute matrice  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  vérifiant

$$MK [\mathbf{N}]_{\wedge}^2 K^\top M^\top \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

représente une homographie de rectification métrique [2]. Pour trouver une matrice  $M$  vérifiant (7), on utilise la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $K [\mathbf{N}]_{\wedge}^2 K^\top$  et le fait qu'elle soit de rang 2.

**Cas d'une caméra non calibrée.** Soit  $E_1$  et  $E_2$  les matrices symétriques des images de deux cercles concentriques (externe et interne respectivement).

- Connaissant  $E_1$  et  $E_2$ , toute matrice  $M \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$  vérifiant

$$M(\hat{\beta}E_1^{-1} - E_2^{-1})M^\top \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (8)$$

où  $\hat{\beta} = \max(|\text{median}(\beta) - \beta|)$ , calculé à partir du vecteur  $\beta$  des valeurs propres généralisées de  $(E_1, E_2)$ , représente une rectification métrique [8]. Pour trouver une matrice  $M$  vérifiant (8), on utilise la décomposition en valeurs singulières de la matrice  $\hat{\beta}E_1^{-1} - E_2^{-1}$  et le fait qu'elle soit de rang 2.

- Connaissant  $E$  et le vecteur  $\mathbf{x}_c = (u, v, 1)^\top$  de l'image du centre la matrice

$$M_c = \left( \begin{bmatrix} -1 & E_{22}uv & -u \\ 0 & -E_{11}u^2 + 1 & -v \\ -E_{11}u & E_{22}v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s \end{bmatrix} \right)^{-1}$$

avec  $r = \left(-\frac{E_{22}}{E_{11}}(E_{11}u^2 + E_{22}v^2 + E_{33})\right)^{1/2}$ , (9)

$$s = \left(-E_{22}(1 - E_{11}u^2)\right)^{1/2}$$

représente une rectification métrique « centrée » [3], c'est-à-dire telle que le centre du plan correspond au centre de la rectification.

### 3 Solutions et algorithmes

Une solution directe consisterait à déterminer directement l'image du centre et à calculer l'homographie de rectification à partir de (9). Pour rendre possible un calcul direct, il faut soit connaître les paramètres de calibrage, soit disposer d'un second cercle (par exemple, concentrique) [7]. Or, même avec ces connaissances, dans le cas d'un calibrage peu précis et d'une estimation d'une image du cercle à faible résolution pixélique (prise de vue à distance importante du bleam), un tel calcul va entacher d'erreurs le calcul de l'homographie et le résultat ne sera pas « exploitable ». Nous nous plaçons dans le cas où il n'est pas possible de calibrer l'appareil, de l'identifier automatiquement, de le localiser dans une base de données regroupant des données de calibrage ou encore d'extraire la distance focale des données EXIF. Alors comment faire ?

La formulation du problème tel qu'exposé dans l'équation (9) implique la recherche de  $(u, v)$  dans un sous-espace de  $\mathbb{R}^2$ . Une de nos contributions est de restreindre ce sous-espace à partir de considérations statistiques en introduisant la notion de « calibrage par défaut ». Les contraintes de fabrication sur les caméras intégrées aux smartphones impliquent en effet des contraintes sur la taille des lentilles et des capteurs de ces appareils. Une des répercussions est que les paramètres intrinsèques des smartphones affichent souvent des valeurs similaires ou très semblables. Notre idée est alors d'interpréter la variance entre les appareils comme une donnée sur l'incertitude d'une caméra possédant des paramètres « par défaut ». Ces considérations statistiques sur les paramètres intrinsèques couplées aux incertitudes des paramètres de l'ellipse détectée comme ellipse externe permettent la restriction de l'espace de recherche.

Ayant montré que rectifier l'image est équivalent à rechercher l'image du centre, nous souhaitons propager ces incertitudes sur l'image du centre estimée avec le calibrage par défaut. Pour cela, il nous faut une fonction de calcul de l'image du centre (ou de la normale) qui soit différentiable, ce qui n'est pas le cas pour celles de la littérature (présence de « si-alors-sinon » et de  $\min()$ ). Nous en proposons une nouvelle, sans fournir toutefois la démonstration complète par manque de place.

### 3.1 Fonction différentiable pour le calcul de l'image du centre

Nous proposons ici une nouvelle fonction de calcul de l'image du centre dont les variables sont les éléments de la matrice  $K$  de calibrage et ceux de la matrice  $E$  de l'image d'un cercle. Nous donnons les coordonnées de l'image du centre sous une forme analytique qui est différentiable, ce qui requiert de n'utiliser ni de « si-alors-sinon » ni de  $\max()$  ou  $\min()$ , contrairement aux définitions précédentes [1, 4], comme dans l'équation (6), où un tri est requis.

Nous détaillons la fonction de calcul de la ligne de fuite du plan de support du cercle, qui est la droite polaire de l'image du centre du cercle par rapport à l'image  $E$  d'un cercle, cf. (5). Le problème que nous résolvons ci-dessous consiste à donner une forme analytique aux deux solutions pour  $\mathbf{N}$ , vecteur de la normale au plan de support du cercle. On supposera que

- $E \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$  est la matrice de l'image d'un cercle ;
- $\{\lambda_i\}$ ,  $i = 1..3$ , est l'ensemble des valeurs propres de  $E$  et  $\{\mathbf{V}_i\}$  celui des vecteurs propres *unitaires* associés.

**Résultat 1** Les valeurs propres de  $E$  sont

$$\lambda_1 = 2p \cos \frac{\alpha}{3} + q \quad (10)$$

$$\lambda_2 = p \left( \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{3} - \cos \frac{\alpha}{3} \right) + q \quad (11)$$

$$\lambda_3 = -p \left( \sqrt{3} \sin \frac{\alpha}{3} + \cos \frac{\alpha}{3} \right) + q \quad (12)$$

où

$$\alpha = \arccos \left( \frac{1}{2} \det \frac{1}{p} F \right) \in [0, \pi]$$

$$q = \frac{1}{3} \text{trace } E$$

$$F = E - qI$$

$$p = \sqrt{\text{trace} \left( \frac{1}{6} (F)^2 \right)}$$

et l'on a

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$$

**Résultat 2** Les deux solutions pour  $\mathbf{N}$ , vecteur unitaire de la normale au plan de support du cercle, sont

$$\mathbf{N}_{1,2} = \frac{\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \mathbf{V}_1 \pm \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3} \mathbf{V}_3}{\|\sqrt{\lambda_1 - \lambda_2} \mathbf{V}_1 \pm \sqrt{\lambda_2 - \lambda_3} \mathbf{V}_3\|} \quad (13)$$

Ce résultat est bien sûr sensiblement équivalent à (6), sans la présence du dénominateur. Nous insistons sur le fait que, une fois ces vecteurs obtenus, les deux solutions pour l'image du centre se déduisent directement à partir des égalités (4) et (5).

**Résultat 3** Les formes analytiques de  $\lambda_1 - \lambda_2$  et  $\lambda_2 - \lambda_3$  dans l'équation (13) sont

$$\lambda_1 - \lambda_2 = \cos \frac{\alpha}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\alpha}{3} \quad (14)$$

$$\lambda_2 - \lambda_3 = 2 \frac{\sqrt{3}}{3} \sin \frac{\alpha}{3} \quad (15)$$

L'intérêt de ce dernier résultat est de montrer, d'une part qu'il est possible de calculer directement  $\lambda_1 - \lambda_2$  et  $\lambda_2 - \lambda_3$ , sans passer par un algorithme de décomposition en valeurs propres, et, d'autre part, que la nécessité de trier les valeurs propres triées ne se pose plus. Nous omettons la démonstration par manque de place. Le calcul d'une forme symbolique des valeurs propres ordinaires est inspiré par les travaux de Kopp et al. [9].

Ensuite, il est assez simple de calculer les vecteurs propres de  $E$ . Si  $D = E - \lambda I$  est de rang 2 alors le vecteur unitaire  $V \in \mathbb{R}^3$  tel que  $DV = 0$  est de la forme :

$$V = \frac{W}{\|W\|} \text{ où } W = \begin{bmatrix} -D_{23}^2 + D_{22}D_{33} \\ D_{13}D_{23} - D_{12}D_{33} \\ D_{12}D_{23} - D_{13}D_{22} \end{bmatrix} \quad (16)$$

### 3.2 Principe général de l'algorithme

Les grandes lignes de l'algorithme recherchant une solution au problème sont les suivantes :

1. Définir un « calibrage par défaut » par le biais d'un vecteur aléatoire  $K = (f_x, f_y, u_0, v_0)$  de moyenne  $\bar{K}$  et de covariance  $\Sigma_K$  représentant l'incertitude liée aux paramètres de calibrage.
2. Ajuster les paramètres d'une ellipse aux points définissant le contour de l'image du cercle via l'estimation d'un vecteur aléatoire  $E$  de moyenne  $\bar{E}$  et de covariance  $\Sigma_E$  représentant l'incertitude liée aux paramètres de l'ellipse.
3. À partir des résultats précédents, définir une loi  $X$  de distribution pour le vecteur  $X$  des coordonnées cartésiennes de l'image du centre du cercle, paramétrée par  $\bar{X}_c$  et  $\Sigma_{X_c}$ , en fonction de  $K$  et  $E$ .
4. Générer des candidats pour l'image du centre suivant la loi  $X$  puis calculer les homographies associées, cf. équation (9). Sélectionner parmi les homographies celles fournissant la meilleure rectification au sens d'un certain critère photométrique.

### 3.3 « Calibrage par défaut »

Étant donné que la caméra n'est pas calibrée, on va définir un « calibrage par défaut » à partir d'un vecteur aléatoire  $K$ . Nous faisons l'hypothèse très simple que le point principal est situé au milieu de l'image et que la distance focale est une certaine fonction de la diagonale de l'image exprimée en pixels. Cette fonction peut être définie de façon heuristique, comme nous l'avons fait dans nos expériences

cf. §4.1. On suppose les paramètres intrinsèques indépendants, en effet en considérant le modèle de caméra simplifié présenté cf. §2, l'indépendance des paramètres revient à justifier que la taille du capteur photométrique en largeur et en longueur et la position horizontale et verticale de celui-ci par rapport à la lentille sont quatre paramètres indépendants. Cette hypothèse est donc raisonnable lorsqu'on ne considère pas de facteur d'obliquité. On peut alors attribuer à ces paramètres des écarts types de façon empirique afin d'obtenir une loi de distribution sur  $K$ .

### 3.4 Ajustement de l'ellipse externe et incertitudes associées

L'ajustement d'une ellipse consiste à trouver l'ellipse la plus proche des points définissant le contour de celle-ci, au sens d'une certaine distance des points à l'ellipse. Il existe une solution directe à ce problème d'une formulation linéaire aux moindres carrés fondée sur une distance algébrique [5]. Cette solution n'est pas optimale de par l'introduction d'une distance algébrique qui diffère de la distance géométrique. En général, les solutions proposées consistent à trouver une approximation algébrique et à optimiser de façon non linéaire avec une formulation du problème aux moindres carrés. Pour déterminer les incertitudes associées aux paramètres de l'ellipse externe estimée par ajustement des points, Spzak et al. [12] proposent une nouvelle formulation qui maximise la vraisemblance. L'optimisation du problème avec Levenberg-Marquardt fournit une mesure de l'écart type par propagation de l'incertitude sur la position des points du contour. Les auteurs proposent un estimateur pour  $E$  à partir de l'hypothèse d'un bruit gaussien identique pour tous les points du contour. Les étapes pour le calcul de  $\bar{E}$  et  $\Sigma_E$  se résument ainsi :

1. Détection des points contours d'une ellipse ;
2. Calcul d'une première estimation algébrique et calcul de la matrice de covariance associée aux points du contour ;
3. Optimisation et calcul de la matrice de covariance associée à l'ellipse.

### 3.5 Loi statistique pour l'image du centre

Nous considérons que le vecteur des coordonnées cartésiennes de l'image du centre,  $X_c = (x_c, y_c)^T$ , est un vecteur aléatoire de moyenne  $\bar{X}_c$  et de covariance  $\Sigma_{X_c}$ . Nous utilisons cette hypothèse pour générer des candidats en définissant une loi de distribution pour  $X$ , paramétrée par  $\bar{X}_c$  et  $\Sigma_{X_c}$ . Pour trouver  $\bar{X}_c$  et  $\Sigma_{X_c}$ , nous considérons que les connaissances dont nous disposons sont aussi associées à des vecteurs aléatoires, à savoir que les paramètres de calibrage « par défaut » sont stockés dans un vecteur aléatoire  $K$  et que les paramètres de l'ellipse détectée comme image du cercle, sont stockés dans un vecteur aléatoire  $E$ . On considère la fonction  $f$  telle que  $X_c = f(K, E)$ , où  $f$  est la fonction définie dans le paragraphe §3.1. Sachant que  $\bar{X}_c = f(\bar{K}, \bar{E})$ , nous utilisons une approximation du

premier ordre de la fonction  $f$  pour obtenir une valeur approchée de  $\Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_c}$ ,

$$\Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_c} = \mathbf{J}_f(\bar{\mathbf{K}}, \bar{\mathbf{E}}) \begin{pmatrix} \Sigma_{\mathbf{K}} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \Sigma_{\mathbf{E}} \end{pmatrix} \mathbf{J}_f(\bar{\mathbf{K}}, \bar{\mathbf{E}})^\top \quad (17)$$

où  $\mathbf{J}_f$  est la matrice Jacobienne de  $f$ , comme cela est décrit par exemple dans [11, p.139].

Étant donné qu'il existe deux solutions pour  $\mathbf{X}_c$  à partir de  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{E}$ , nous définissons deux fonctions  $f_1$  et  $f_2$  qui nous donnent deux solutions, cf. équation (13) :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{X}_c^1 \\ 1 \end{pmatrix} \sim E^{-1} \mathbf{I}_1(\mathbf{K}, \mathbf{E}) \text{ et } \begin{pmatrix} \mathbf{X}_c^2 \\ 1 \end{pmatrix} \sim E^{-1} \mathbf{I}_2(\mathbf{K}, \mathbf{E}) \quad (18)$$

où  $E \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R})$  est la matrice associée à  $\mathbf{E}$ . Ces deux cas sont traités de façon indépendante ce qui nous conduira dans la partie suivante à posséder deux lois pour l'image du centre et à générer ainsi deux ensembles de candidats. Par souci de clarté nous omettons les indices différenciant les deux solutions. Une hypothèse gaussienne sur la distribution de l'image du centre nous permet d'exprimer simplement la loi de  $X$  avec  $\bar{\mathbf{X}}_c$  et  $\Sigma_{\bar{\mathbf{X}}_c}$ , nous pouvons visualiser un exemple de cette distribution sur la FIGURE 2.

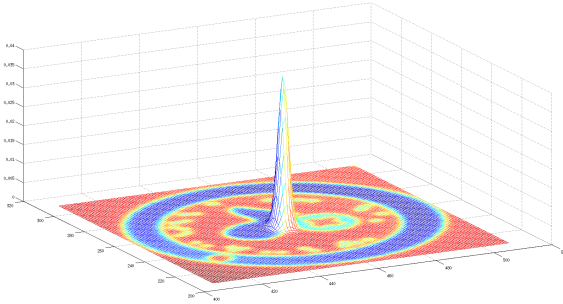


FIGURE 2 – Visualisation de la distribution de l'image du centre sur l'image d'un marqueur

### 3.6 Sélection et validation de candidats

La connaissance sur la loi du vecteur  $\mathbf{X}_c = f(\mathbf{K}, \mathbf{E})$  nous permet de générer des candidats de façon aléatoire qui respectent les distributions des vecteurs  $\mathbf{K}$  et  $\mathbf{E}$ . L'application de l'équation (9) aux valeurs moyennes  $\bar{\mathbf{X}}_c$  et  $\bar{\mathbf{E}}$  nous permet ensuite d'associer à chaque candidat une homographie de rectification. La suite de cette partie propose une piste pour trouver un critère photométrique permettant de résoudre le problème de façon complète.

Les méthodes dites denses où l'intensité des pixels est comparée sur toute l'image nous fournissent une base pour construire un critère. Le problème de cette méthode est qu'elle nécessite soit de retrouver la rotation, soit de redéfinir un critère invariant par rotation. Le fait est qu'en général les marqueurs circulaires ne présentent pas de motifs permettant de résoudre l'ambiguïté de rotation. Nous nous sommes donc intéressés à la seconde solution, et un

premier critère a été proposé. L'idée est de calculer la transformation polaire de l'image et de calculer la moyenne le long des angles. Cette transformation fournit ce qu'on appelle le « profil radial » de l'image du marqueur. Il est alors possible de comparer le « profil radial » du modèle d'apparence du marqueur avec celui de l'image rectifiée. Afin de permettre une robustesse à la différence d'éclairage du marqueur, nous avons calculé la corrélation entre les « profils radiaux ». Cette approche est prometteuse mais ne fonctionne convenablement que lorsque la taille apparente du marqueur sur l'image est suffisamment grande (>120 pixels), il en va de même pour les autres critères que nous avons étudiés.

## 4 Résultats

Dans cette section, nous proposons une évaluation de notre procédé de génération de candidats pour la rectification métrique. L'idée sous-jacente est de valider en partie notre approche en confirmant que parmi les candidats générés pour la rectification, il est possible d'en trouver un qui rectifie correctement l'image. Pour cela des images d'un marqueur inscrit dans un damier ont été prises par différents appareils que nous avons calibrés de façon précise et auxquelles nous fournissons un calibrage « par défaut » empirique. La qualité de la reconstruction est évaluée à partir de l'erreur de reprojection sur les points d'un damier dans lequel notre marqueur a été inséré. Nous comparerons ainsi l'erreur de reprojection des méthodes directes avec la rectification candidate qui minimise l'erreur parmi tous les candidats générés par notre modèle. La librairie OpenCV est utilisée pour la détection des coins du damier et le calibrage des caméras mais les tests ont été réalisés sous matlab avec l'insertion d'un fichier MEX.

### 4.1 Calibrage « par défaut »

Il n'existe pas de base de données complète qui regroupe toutes les données des paramètres intrinsèques « usines » des smartphones. Le site [www.digicamdb.com](http://www.digicamdb.com) présente une base de données des appareils photographiques mais celle-ci ne concerne pas les téléphones mobiles.

Nous sommes partis du constat que pour les smartphones actuels, la taille du capteur en pixel/mm et la focale de la lentille sont souvent similaires d'un appareil à un autre. De ce fait, il est possible de constituer un calibrage « par défaut » avec les appareils que nous avons utilisés. Nous définissons une fonction empirique s'appuyant sur la taille de la diagonale de l'image. Le TABLEAU 1 nous permet de résumer les différents capteurs utilisés ainsi que leurs caractéristiques. La FIGURE 3, nous montre la valeur de la focale pour chacun de ces appareils.

### 4.2 Méthode d'évaluation et de comparaison

**Détection des primitives.** Nous nous plaçons dans un contexte où nous souhaitons une détection rapide des primitives géométriques. Cela limite l'extraction de contour à des algorithmes simplifiés. L'approche que nous em-

Numéro	1	2	3	4
Constructeur	Samsung	Samsung	Sony Xperia	Sony Xperia
Modèle	GT-I9100	SM-G900F	E2303	D5803
Résolution	3264x2448	5312x2988	3920x2204	3840x2160
Nb. images	53	26	23	21

TABLE 1 – Capteurs de smartphones testés.

Représentation de la distribution du facteur focale/diagonale

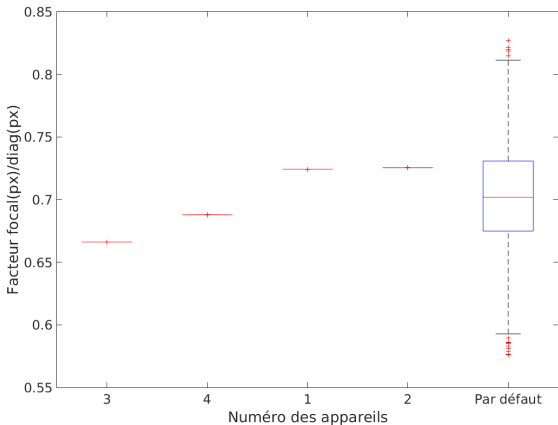


FIGURE 3 – Valeurs du facteur focal/diagonale sur les différents capteurs testés

ployons ici peut se comparer à l’approche de Fornaciari et al. [6], elle est composée de deux étapes :

- Génération de germes à partir de l’extraction des gradients (filtre de Sobel) ;
- Propagation d’arcs dans la direction perpendiculaire aux gradients.

Un ajustement de l’ellipse sous une formulation linéaire permet de rapidement sélectionner les ellipses potentielles correspondant à l’image du contour du marqueur. Les difficultés principales de la détection des marqueurs fiduciaires résident dans la robustesse au flou directionnel, au changement de contraste et aux bruits. Dans les faits, lorsque ces altérations apparaissent, des cas de non détection ou de mauvaises détections apparaissent et il est impossible de rectifier correctement l’image par une transformation projective du plan. Nous ne traitons les données que dans les cas où ces problèmes n’apparaissent pas, en ne conservant que les images suffisamment nettes.

Nous appelons « vérité terrain » pour l’ellipse externe  $E$ , le cercle externe transformé par l’homographie calculé grâce à l’ajustement des points du damier entourant le marqueur. La détection et l’ajustement des points sont réalisées avec les routines disponibles dans `OpenCV`. On supposera en effet le marqueur suffisamment petit par rapport au damier (8 fois plus petit dans l’expérience) pour utiliser celui-ci comme référence pour la mesure de l’erreur.

**Méthodes comparées.** Elles sont données dans le TABLEAU 2. Ces méthodes sont classées selon le degré de

Algorithme	$E$	$E_2$	$K$	méthode
1	déteçté	déteçté	×	$EE$
2	déteçté	×	calibré	$EX$
3	déteçté	×	défaut	$EX$
4	déteçté	×	défaut	$EXC$
5	vérité terrain	×	calibré	$EX$

TABLE 2 – Différents algorithmes testés et comparés

connaissance sur les paramètres et les ellipses utilisés. La méthode  $EXC$  fait référence à notre approche qui s’appuie sur un calibrage « par défaut » et la détection d’une seule ellipse afin de déterminer un espace de candidat réduit. Lors du calcul de l’erreur de reprojection seul le meilleur candidat est conservé. La méthode  $EE$  fait référence à la rectification utilisant deux ellipses par résolution des valeurs propres généralisées. La méthode  $EX$  s’appuie sur l’utilisation d’une ellipse et de l’image du centre calculé avec les paramètres intrinsèques. Les algorithmes utilisant le marqueur (1,2,3 et 4) sont également comparés à l’algorithme utilisant le damier (5) afin d’évaluer la précision des méthodes. Ce dernier algorithme utilise en effet le damier dans le calcul de l’image du cercle, mais la méthode utilisée pour le calcul de la rectification est similaire afin de fournir un résultat comparable.

**Mesure de l’erreur.** L’erreur de reconstruction est calculée à partir des images des points du damier déteçtés. Les méthodes que nous comparons ne permettent pas d’obtenir directement la rectification complète entre l’image des points du damier et leurs coordonnées sur le plan. Afin d’évaluer l’erreur de reprojection il est nécessaire de calculer la rotation du plan. Nous employons ici la décomposition en valeurs singulières afin d’estimer cette rotation sur la correspondance entre les coordonnées des points du damier et leur rectification. Cette rotation que nous notons  $W$ , nous donne à partir d’un point du damier dans le plan, la coordonnée du point rectifié par l’homographie de rectification métrique  $H$  calculée par une méthode. Ainsi si on considère un point  $\mathbf{X}$  du damier avec pour projection le point  $\mathbf{X}'$  sur l’image. On a  $\begin{pmatrix} W & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix} \sim H \begin{pmatrix} \mathbf{X}' \\ 1 \end{pmatrix}$ . On peut donc calculer l’erreur de reprojection sur l’image en calculant la racine carrée des distances moyennes entre les points du damier reprojétés avec  $H^{-1} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ 1 \end{pmatrix}$  et les points déteçtés sur l’image.

### 4.3 Analyse des résultats

Les résultats mettent en évidence deux tendances principales qu’on peut séparer en triant les images selon la taille de l’ellipse observée dans l’image.

Dans la FIGURE 4, la distribution des erreurs de reprojection est évaluée sur des ellipses mesurant entre 60 et 120

Résultats pour les ellipses de taille moyenne (entre 60 et 120 pixels)

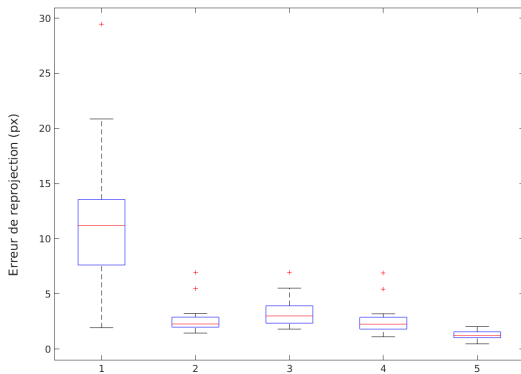


FIGURE 4 – Résultats obtenus pour des ellipses de taille moyenne.

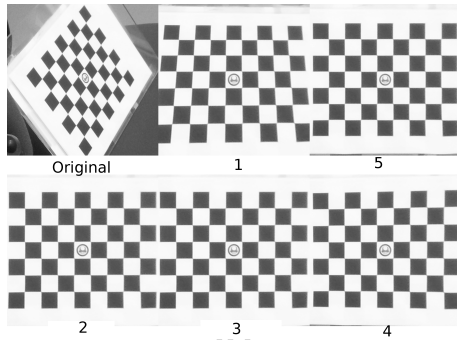


FIGURE 5 – Rectification du marqueur et du damier avec les méthodes comparées

pixels. On constate alors que l’algorithme 4 atteint la même précision que l’algorithme 2 qui utilise directement des paramètres calibrés. Ce qui signifie que la distribution des candidats couvre bien un domaine contenant une « bonne » solution. L’algorithme 5 permet de comparer l’erreur de reprojection par rapport à la rectification utilisant le damier, ceci nous donne une idée de la précision générale des algorithmes. L’exemple présenté dans la FIGURE 5 permet d’observer visuellement les rectifications. Pour cette taille d’ellipse le marqueur est considéré comme « décodable ». L’utilisation directe des paramètres par défaut (méthode 3) n’est pas aussi précise bien que pour les caméras testées et les tailles de marqueurs considérés, son erreur est globalement plus faible qu’avec l’utilisation de deux ellipses (algorithme 1). Ces deux constats confirment ainsi l’intérêt de l’approche :

- Le paramétrage proposé et notre modèle de génération de candidat permettent d’atteindre la précision du cas calibré ;
- Le domaine de travail des ellipses décodables ne nécessite pas la détection de deux ellipses ou un calibrage précis.

Dans la FIGURE 6, ne sont prises en compte que les images

Resultats pour les ellipses de petite taille (< 60 pixels)

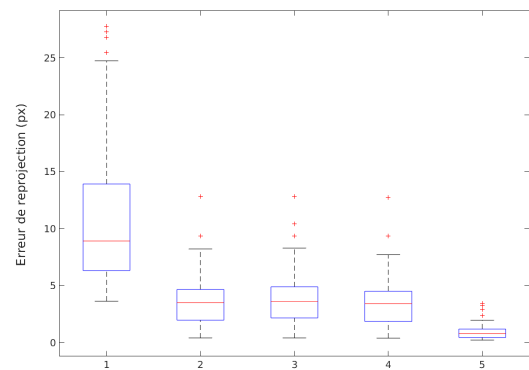


FIGURE 6 – Résultats obtenus pour des ellipses de petite taille

où l’apparence du marqueur est très petite (inférieur à 60 pixels). Une nouvelle observation apparaît dans ces conditions, en effet la différence d’erreur de reprojection entre le cas calibré et le cas non calibré « par défaut » semble s’effacer. Par conséquent la génération de candidats ne permet plus de proposer une meilleure solution que le cas « par défaut ». Ce résultat met en avant le fait que si notre paramétrage permet de bien intégrer l’erreur sur les paramètres intrinsèques, la qualité de la rectification reste encore assez contrainte par la détection de l’ellipse.

## 5 Conclusion

Nous avons proposé une méthode de rectification du plan de support d’un marqueur circulaire qui ne nécessite la détection que d’une seule ellipse lorsqu’un modèle de connaissance approximatif sur l’appareil est disponible. Notre approche permet d’atteindre des résultats équivalents au cas calibré lorsqu’il est possible de définir un critère de sélection sur les rectifications candidates. La validation d’un critère photométrique et la construction d’un modèle de connaissance des caméras plus complet permettra par la suite d’améliorer l’approche que nous proposons afin de proposer une méthode générale. On observe cependant que lorsque les images des cercles apparaissent très petites sur les images, l’algorithme est limité par la précision de la détection d’ellipses. Une meilleure prise en compte de l’incertitude sur l’ellipse dans notre modèle de rectification pourrait améliorer nos résultats.

## Références

- [1] F. Bergamasco, A. Albarelli, E. Rodolà, and A. Tosello. RUNE-Tag : A high accuracy fiducial marker with strong occlusion resilience. *CVPR*, 2011.
- [2] B. Bocquillon, A. Bartoli, P. Gurdjos, and A. Cruzil. On constant focal length self-calibration from multiple views. 2007.



- [3] L. Calvet, P. Gurdjos, C. Griwodz, and S. Gasparini. Detection and Accurate Localization of Circular Fiducials under Highly Challenging Conditions. *CVPR*, 2016.
- [4] Q. Chen, H. Wu, and T. Wada. Camera calibration with two arbitrary coplanar circles. *ECCV*, 2004.
- [5] A. W Fitzgibbon and R. B Fisher. Direct Least Squares Fitting of Ellipses. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 1996.
- [6] M. Fornaciari and A. Prati. Very fast ellipse detection for embedded vision applications. *Distributed Smart Cameras (ICDSC)*, 2012.
- [7] P. Gurdjos, P. Sturm, and Y. Wu. Euclidean Structure from  $N \geq 2$  Parallel Circles : Theory and Algorithms. *ECCV*, 2006.
- [8] J. S. Kim, P. Gurdjos, and In So Kweon. Geometric and algebraic constraints of projected concentric circles and their applications to camera calibration. *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 2005.
- [9] J. Kopp. Efficient numerical diagonalization of hermitian  $3 \times 3$  matrices. *International Journal of Modern Physics C*, 2008.
- [10] A. Pagani, J. Koehle, and D. Stricker. Circular Markers for camera pose estimation. *WIAMIS*, 2011.
- [11] Andrew Zisserman Richard Hartley. *Multiple View Geometry*, volume 53. 2003.
- [12] Z. L. Szapak, W. Chojnacki, and A. van den Hengel. Guaranteed Ellipse Fitting with a Confidence Region and an Uncertainty Measure for Centre, Axes, and Orientation. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 2015.