

# La pseudo-distance du dahu

E. Carlinet<sup>1</sup>

Y. Xu<sup>1,2</sup>

N. Boutry<sup>1,3</sup>

T. Géraud<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Laboratoire de Recherche et Développement de l'EPITA (LRDE)

<sup>2</sup> Institut Mines Telecom, Telecom ParisTech

<sup>3</sup> Université Paris-Est, LIGM, Équipe A3SI, ESIEE

EPITA-LRDE, 14-16 rue Voltaire, 94270 Le Kremlin-Bicêtre, France

Email edwin.carlinet@lrde.epita.fr

## Résumé

La distance de la barrière minimum est définie comme la plus petite dynamique de l'ensemble des niveaux de gris le long d'un chemin entre deux points dans une image. Pour cela, on considère que l'image est un graphe à valeurs sur les sommets. Cependant, cette définition ne correspond pas à l'interprétation d'une image comme étant une carte d'élévation, c'est-à-dire, un paysage continu d'une manière ou d'une autre. En se plaçant dans le cadre des fonctions multivoques, nous présentons une nouvelle définition pour cette distance. Cette définition, compatible avec l'interprétation paysagère, est dénuée de problèmes topologiques bien qu'en restant dans un monde discret. Nous montrons que la distance proposée est reliée à la structure morphologique d'arbre des formes, qui permet de surcroît un calcul rapide et exact de cette distance. Cela se démarque de sa définition classique, pour laquelle le seul calcul rapide n'est qu'approximatif.

## Mots Clefs

Topologie discrète, chemin minimal, distance de la barrière minimum, fonctions multivoques, arbre morphologique des formes.

## Abstract

The minimum barrier distance (MBD) is defined as the minimal interval of gray-level values in an image along a path between two points, where the image is considered as a vertex-valued graph. Yet this definition does not fit with the interpretation of an image as an elevation map, i.e. a somehow continuous landscape. In this paper, based on the discrete set-valued continuity setting, we present a new discrete definition for this distance, which is compatible with this interpretation, while being free from digital topology issues. Amazingly, we show that the proposed distance is related to the morphological tree of shapes, which in addition allows for a fast and exact computation of this distance. That contrasts with the classical definition of the MBD, where its fast computation is only an approximation.

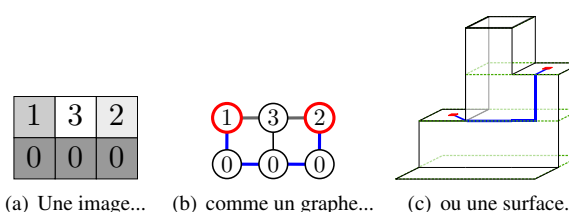


FIGURE 1 – Deux distances différentes de barrière minimale : (b) donne **2**, tandis que (c) donne **1**.

## Keywords

Discrete topology, minimal path, minimum barrier distance, set-valued maps, tree of shapes.

## 1 Introduction

La distance de la barrière minimum (MBD) [22] est définie comme la plus petite dynamique de l'ensemble des niveaux de gris le long d'un chemin entre deux points dans une image<sup>1</sup>. Par exemple, l'image de la Fig. 1(a) peut être vue comme un graphe représenté en 1(b), et le chemin bleu entre les points rouges est minimal : la séquence de valeurs est  $\langle 1, 0, 0, 0, 2 \rangle$  donc l'intervalle est  $[0, 2]$  et la distance vaut **2**. Cependant, si l'on considère que la fonction discrète décrit une surface comme celle de la Fig. 1(c), le chemin bleu dans cette sous-figure est tel que la distance entre les deux points rouges est maintenant de **1**. Cet article montre comment définir proprement cette variante de la MBD qui considère que la carte d'élévation est une fonction continue.

La MBD est intéressante à plusieurs titres. Tout d'abord, c'est une distance "originale" qui se distingue des distances classiques de longueur de chemins, parce qu'elle ne porte que sur la dynamique de la fonction. Deuxièmement, elle a été utilisée avec succès pour la segmentation d'objets saillants [28, 23, 27]; des résultats sont montrés en Fig. 2. Enfin, comme nous le verrons, sa version continue

<sup>1</sup> Il s'agit donc du plus petit intervalle possible contenant l'ensemble des valeurs de niveaux d'un chemin reliant les deux points ; dit autrement, c'est le plus petit diamètre des ensembles de valeurs des chemins ; voir plus loin l'Eq. 8.

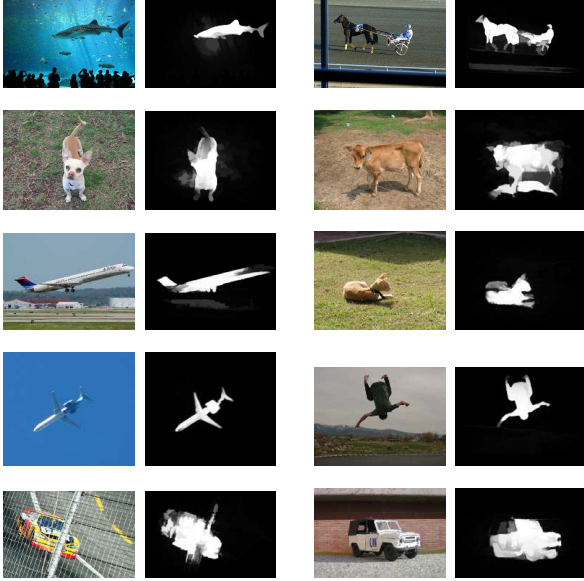


FIGURE 2 – Quelques résultats tirés de [28].

présentée ici est liée à la morphologie mathématique. Dans l'exemple de la Fig. 1(c), en considérant l'image comme un paysage, nous pouvons observer qu'un chemin peut être défini sur un flanc pentu. C'est pour cela que nous avons décidé de nommer cette distance particulière d'après le légendaire *dahu*.

Afin de définir la version continue de la MBD et de montrer comment elle peut être calculée efficacement, nous nous appuyons sur plusieurs outils : les fonctions multivoques, les complexes cubiques et l'arbre morphologique des formes (ToS en abrégé), décrits en Section 2. En Section 3, nous commencerons par donner une définition naïve de la distance ; nous verrons que cela soulève des problèmes de topologie discrète, et nous proposerons une nouvelle définition (liée étroitement à la continuité des fonctions multivoques [20]) qui résout les problèmes posés.

Bien que la définition de la distance du dahu soit hautement combinatoire, nous verrons en Section 4 que cette distance peut être calculée efficacement grâce à l'arbre des formes de fonctions à valeurs intervalles. Une propriété remarquable est que nous pouvons calculer efficacement la distance *exacte*, tandis que le seul calcul efficace de la MBD reste approché. Enfin, une illustration s'appuyant sur la distance du dahu, précisément la segmentation d'images de documents, sera donnée en Section 5.

Cet article se focalise principalement sur la définition de cette nouvelle distance, sur les problèmes topologiques et sur la méthode de calcul efficace. Ces trois points sont les principales contributions que nous détaillerons<sup>2</sup>.

2. Par conséquence, cet article ne parle *pas* des autres aspects de notre travail : les applications pratiques de cette nouvelle distance, une comparaison quantitative avec la MBD, les détails d'implémentation et les temps d'exécution ; enfin, certaines preuves ont été omises.

## 2 Fondements théoriques

Cette section fait un tour rapide des outils théoriques dont nous aurons besoin en Sec. 3 et 4.

### 2.1 Notions de base

Considérons un ensemble discret fini  $X$ . L'ensemble de tous les sous-ensembles de  $X$  est noté  $\mathcal{P}(X)$ , donc  $E \in \mathcal{P}(X)$  signifie  $E \subseteq X$ .  $X$  est doté d'une relation de voisinage discret ; l'ensemble des voisins de  $x \in X$  est noté  $\mathcal{N}_X(x) \subset X$ , et il satisfait :  $x' \in \mathcal{N}_X(x)$  ssi  $x' \neq x$  et  $x \in \mathcal{N}_X(x')$ .

Un chemin discret  $\pi$  de  $X$  est une séquence  $\pi = \langle \pi_1, \dots, \pi_i, \dots, \pi_k \rangle$ , où  $k$  est la longueur de la séquence, telle que  $\pi_i \in X$  et  $\pi_{i+1} \in \mathcal{N}_X(\pi_i)$ . Une séquence  $\langle x, \dots, x' \rangle$  est appelée chemin entre  $x$  et  $x'$  ; l'ensemble de tous les chemins entre  $x$  et  $x'$  est noté  $\Pi(x, x')$ , et nous écrivons  $\pi(x, x')$  pour désigner un élément de  $\Pi(x, x')$ .

Une composante connexe  $\Gamma$  de  $E \subset X$  est un sous-ensemble de  $E$  qui est connecté par un chemin ( $\forall x \neq x' \in \Gamma, \Pi(x, x') \neq \emptyset$ ) et maximal ( $\forall x \in \Gamma, \forall x' \in E \setminus \Gamma, \Pi(x, x') = \emptyset$ ). L'ensemble des composantes connexes de  $E$  est noté  $\mathcal{CC}(E)$ , et étant donné  $x \in X$ , la composante connexe de  $E$  qui contient  $x$  est notée  $\mathcal{C}(E, x) \in \mathcal{CC}(E)$ —par convention, si  $x \notin E$  alors  $\mathcal{C}(E, x) = \emptyset$ . L'opérateur de remplissage de cavités (en 2D, bouchage de trous) est noté  $\text{Sat}$  et défini par :  $\text{Sat}(E, x_\infty) = X \setminus \mathcal{C}(X \setminus E, x_\infty)$ , où  $x_\infty \in X$  est un "point à l'infini" (en pratique, pris sur le bord de  $X$  si le bord existe). Dans la suite, nous écrirons  $\text{Sat}(E)$  par abus de notation.

Dans cet article, nous ne considérerons que des fonctions dont le domaine est un ensemble  $X$  discret, fini, et connecté par un chemin.

### 2.2 Fonctions scalaires et multivoques

Une image en niveaux de gris est typiquement une fonction scalaire bornée telle que  $X$  est un sous-ensemble  $\mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^n$  avec  $n \geq 2$ , et son codomaine est  $\mathbb{Z}$  ou  $\mathbb{R}$ . C'est le cas de l'image montrée en Fig. 1(a). Maintenant, si nous regardons la surface de la Fig. 1(c), son élévation ne peut pas être définie par une fonction scalaire. Néanmoins elle peut être une fonction de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ , où  $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$  dénote l'espace des intervalles de  $\mathbb{R}$  avec  $\mathbb{R}$  totalement ordonné. Étant donnés deux intervalles  $a = [y_a, y'_a]$  et  $b = [y_b, y'_b]$ , l'intervalle  $[\min(y_a, y_b), \max(y'_a, y'_b)]$  est noté  $\text{span}\{a, b\}$ . Rappelons maintenant des définitions liées aux fonctions multivoques.

Une fonction multivoque  $U : X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$  est caractérisée par son graphe,  $\text{Gra}(U) = \{(x, y) \in X \times Y; y \in U(x)\}$  [1]. Une définition de l'inverse par une fonction multivoque  $U$  d'un sous-ensemble  $M \subset Y$  est  $U^\ominus(M) = \{x \in X; U(x) \subset M\}$ , et s'appelle le *noyau* de  $M$  par  $U$ . Supposons que  $X$  et  $Y$  sont des espaces métriques. L'extension "naturelle" de la continuité des fonctions univoques aux fonctions multivoques est caractérisée par la propriété suivante :  $U$  est continue ssi le noyau de tout sous-ensemble ouvert de  $Y$  est un ensemble ouvert de  $X$ .

Dans [16], les auteurs ont défini la notion d'ensembles de niveaux pour les fonctions multivoques ; à  $\lambda \in Y$ , les en-

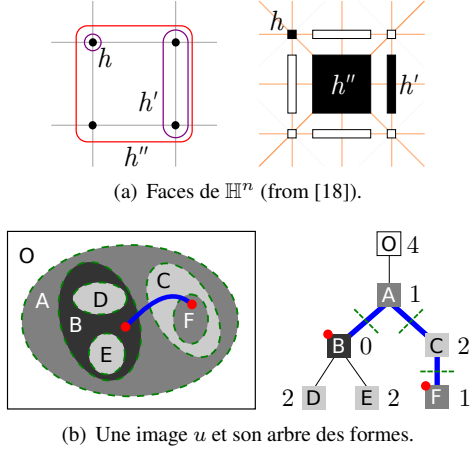


FIGURE 3 – Un complexe cubique pour l’espace  $X$  (a) et un arbre des formes pour  $u$  (b).

sembles de niveaux inférieurs et supérieurs de  $U$  sont respectivement :

$$\begin{aligned} [U \triangleleft \lambda] &= \{x \in X; \forall y \in U(x), y < \lambda\} \\ \text{et } [U \triangleright \lambda] &= \{x \in X; \forall y \in U(x), y > \lambda\}. \end{aligned} \quad (1)$$

Ces définitions sont fondamentales parce qu’elles sont les outils permettant de construire des outils morphologiques sur les fonctions multivoques (nous en utiliserons plus tard dans cet article en Sec. 2.4 et 4.1).

Une fonction scalaire  $u : X \rightarrow Y$  peut être simplement traduite en une fonction multivoque  $\dot{u} : X \rightarrow \mathbb{I}_Y$  avec  $\forall x \in X, \dot{u}(x) = \{u(x)\}$ . Entre les fonctions multivoques de  $X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ , nous pouvons définir la relation  $\ll$  par :

$$U_1 \ll U_2 \Leftrightarrow \forall x \in X, U_1(x) \subseteq U_2(x). \quad (2)$$

Par un abus de notation, nous écrivons  $u \ll U$  pour dire que  $\dot{u} \ll U$ , ce qui signifie que nous avons  $\forall x \in X, u(x) \in U(x)$ . Une illustration est visible plus loin : la fonction  $\bar{u}$  de la Fig. 4(d) et la fonction  $\tilde{u}$  de la Fig. 4(b) sont telles que  $\bar{u} \ll \tilde{u}$ . Dans la suite, nous ne considérerons que des fonctions à valeurs d’intervalles, c’est-à-dire, des fonctions de  $X \rightarrow \mathbb{I}_Y$  (donc pas du cas général  $X \rightarrow \mathcal{P}(Y)$ ).

### 2.3 Complexes cubiques

À partir des ensembles  $H_0^1 = \{\{a\}; a \in \mathbb{Z}\}$  et  $H_1^1 = \{\{a, a+1\}; a \in \mathbb{Z}\}$ , nous pouvons définir  $\mathbb{H}^1 = H_0^1 \cup H_1^1$  et l’ensemble  $\mathbb{H}^n$  comme le produit Cartésien  $n$ -aire de  $\mathbb{H}^1$ . Si un élément  $h \subset \mathbb{Z}^n$  est le produit Cartésien de  $d$  éléments de  $H_1^1$  et de  $n - d$  éléments de  $H_0^1$ , nous disons que  $h$  est une  $d$ -face de  $\mathbb{H}^n$  et que  $d \in \llbracket 0, n \rrbracket$  est la dimension de  $h$ ; elle est notée  $\dim(h)$ . L’ensemble de toutes les faces,  $\mathbb{H}^n$ , est appelé l’espace  $nD$  des complexes cubiques. La Figure 3(a) montre un ensemble de faces  $\{h, h', h''\} \subset \mathbb{H}^2$  où  $h = \{0\} \times \{1\}$ ,  $h' = \{1\} \times \{0, 1\}$ , et  $h'' = \{0, 1\} \times \{0, 1\}$ , la dimension de ces faces étant respectivement 0, 1, et 2; elles sont dessinées comme sous-ensembles de  $\mathbb{Z}^2$  (gauche) et comme des objets géométriques (droite).

La paire  $(\mathbb{H}^n, \subseteq)$  forme un poset, à partir duquel on peut dériver une topologie de type T0-Alexandroff sur  $\mathbb{H}^n$ . L’opérateur de fermeture sur les sous-ensembles de  $\mathbb{H}^n$  est noté  $cl$ . Les  $n$ -faces sont les ensembles ouverts minimaux de  $\mathbb{H}^n$ , et l’ensemble des  $n$ -faces, noté  $H_1^n$ , est le  $n$ -produit Cartésien de  $H_1$ . Les faces de  $\mathbb{H}^n$  peuvent être arrangées sur une grille, nommée la grille de Khalimsky, et l’inclusion entre faces conduit à une relation de voisinage entre elles, dessinée en orange dans la Figure 3(a) (droite). Cette relation de voisinage sera utilisée en Sec. 3.2 afin de définir des chemins dans  $\mathbb{H}^n$ .

### 2.4 Arbre morphologique des formes

Étant donnée une image en niveaux de gris  $u : X \rightarrow Y$  et un scalaire  $\lambda \in Y$ , les ensembles de niveaux inférieurs et supérieurs sont définis respectivement par :

$$\begin{aligned} [u < \lambda] &= \{x \in X; u(x) < \lambda\}, \\ \text{et } [u \geq \lambda] &= \{x \in X; u(x) \geq \lambda\}. \end{aligned} \quad (3)$$

En considérant les composantes connexes de ces ensembles, et en utilisant l’opérateur de remplissage de cavités, l’arbre des formes (ToS) d’une image  $u$  est défini classiquement [19] par :

$$\mathfrak{S}(u) = \{\text{Sat}(\Gamma); \Gamma \in \mathcal{CC}([u < \lambda]) \cup \mathcal{CC}([u \geq \lambda])\}_\lambda. \quad (4)$$

Précisément, c’est le dessin de la couverture—le diagramme de Hasse—de  $(\mathfrak{S}(u), \subset)$  qui donne un arbre. Rappelons, qu’étant donnés deux éléments  $S$  et  $S'$  de  $\mathfrak{S}(u)$ , la relation de couverture  $S' \succ S$  est définie par  $S \subset S'$  and  $\nexists S'' \in \mathfrak{S}(u), S \subset S'' \subset S'$ . Par la suite, la couverture entre les composantes se traduit par la parenté dans l’arbre entre les nœuds (notés  $t_*$ ) qui représentent ces composantes :  $S' \succ S \Leftrightarrow t_{S'} = \text{par}(t_S)$ .

Une image et son arbre des formes sont donnés en Fig. 3. Un élément de  $\mathfrak{S}(u)$  est nommé une *forme*; c’est une composante connexe de  $X$  sans cavité, et sa frontière est une ligne de niveau de  $u$ . Chaque forme correspond à un nœud de l’arbre; par exemple, en Fig. 3(b) (droite), le sous-arbre enraciné au nœud “B” correspond à la forme  $B \cup D \cup E$ . Conserver le niveau de chaque nœud—comme affiché en Fig. 3(b) (droite)—permet de reconstruire l’image à partir de son arbre. L’arbre des formes d’une image  $u$  est une représentation morphologique de  $u$  qui permet facilement de gérer le contenu de l’image [10]. Calculer [16, 11] et stocker [6] l’arbre des formes peuvent être fait très efficacement. Enfin, mentionnons que l’arbre des formes est un outil versatile permettant le filtrage d’image [25] et une structure très pertinente pour réaliser des tâches de reconnaissance des formes et de vision par ordinateur [9, 5, 24]. Rappelons maintenant quelques résultats de [20] sur la définition de l’arbre des formes sur les fonctions multivoques. Étant donné une fonction à valeurs d’intervalles  $U : \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{I}_Y$ , en utilisant Eq. 1, son ensemble d’ensembles de niveaux est défini par :

$$\mathfrak{T}(U) = \bigcup_{\lambda} \mathcal{CC}([U \triangleleft \lambda]) \cup \mathcal{CC}([U \triangleright \lambda]). \quad (5)$$

L'ensemble des composantes connexes de  $X$  défini par :

$$\mathfrak{S}(u) = \{ \text{Sat}(\Gamma); \Gamma \in \mathfrak{T}(u) \} \quad (6)$$

peut s'arranger en arbre pour une catégorie particulière de fonctions  $U$ . Toutes les fonctions à valeurs d'intervalles n'ont pas d'arbre des formes. Cependant, si tous les ensembles de niveaux de  $U$  sont "bien-composés" [3], alors cet arbre existe.

## 2.5 Distance de la barrière minimum

Comme définie dans [22], la barrière d'un chemin  $\pi$  dans une image à niveaux de gris  $u$  est :

$$\tau_u(\pi) = \max_{\pi_i \in \pi} u(\pi_i) - \min_{\pi_i \in \pi} u(\pi_i), \quad (7)$$

et la distance de barrière minimum entre  $x$  et  $x'$  dans  $u$  est :

$$d_u^{\text{MB}}(x, x') = \min_{\pi \in \Pi(x, x')} \tau_u(\pi). \quad (8)$$

C'est en fait une pseudo-distance car,  $\forall u$  et  $\forall x, x', x'' \in X$ , elle vérifie :

$$\begin{aligned} d_u^{\text{MB}}(x) &\geq 0 && \text{(non-négativité)} \\ d_u^{\text{MB}}(x, x) &= 0 && \text{(identité)} \\ d_u^{\text{MB}}(x, x') &= d_u^{\text{MB}}(x', x) && \text{(symétrie)} \\ d_u^{\text{MB}}(x, x'') &\leq d_u^{\text{MB}}(x, x') + d_u^{\text{MB}}(x', x''). && \text{(sous-additivité)} \end{aligned}$$

Ce n'est cependant pas une distance car la propriété de positivité ( $x' \neq x \Rightarrow d_u^{\text{MB}}(x, x') > 0$ ) ne tient pas. En effet, nous pouvons avoir  $d_u^{\text{MB}}(x, x') = 0$  pour des  $x \neq x'$ , ce qui arrive dans des zones plates.

Cette pseudo-distance a été utilisée récemment dans [28, 23, 27] pour de la segmentation d'objets saillants; les résultats obtenus (en termes de performance et de précision) sont comparables à ceux de l'état de l'art.

## 3 La pseudo-distance du dahu

Afin de traiter le problème expliqué dans l'introduction, nous avons besoin de traduire une image discrète en une représentation continue telle que celle qui est montrée en Fig. 1(c). Cependant, pour que tous les calculs restent gérables, nous voulons/devons rester dans le monde discret.

### 3.1 Une représentation discrète mais aussi continue

Cette section explique comment représenter une image en niveaux de gris  $u : \mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow Y$  par une fonction à valeurs d'intervalles  $\tilde{u} : \mathcal{D}_H \subset \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{I}_Y$ , et par un nouvel arbre des formes  $\mathfrak{S}(\tilde{u})$ .

Tout d'abord, à chaque  $x = (x_{(1)}, \dots, x_{(n)}) \in \mathcal{D}$ , associons la  $n$ -face :

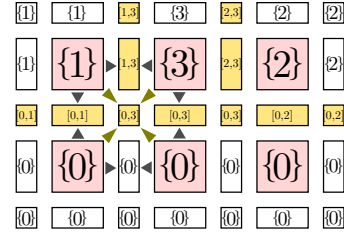
$$h_x = \{(x_{(1)}, x_{(1)} + 1) \times \dots \times (x_{(n)}, x_{(n)} + 1)\} \in H_1^n.$$

$\mathcal{D}_H \subset \mathbb{H}^n$  est le domaine défini par  $\mathcal{D}_H = \text{cl}(\{h_x; x \in \mathcal{D}\})$ , qui correspondra à  $\mathcal{D} \in \mathbb{H}^n$ . À partir de  $u$  nous définissons  $\tilde{u}$  par  $\forall h \in \mathcal{D}_H$  :

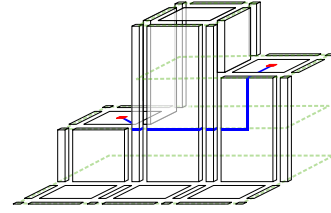
$$\tilde{u}(h) = \text{span}\{u(x); x \in \mathcal{D} \text{ et } h \subset h_x\}. \quad (9)$$

1	3	2
0	0	0

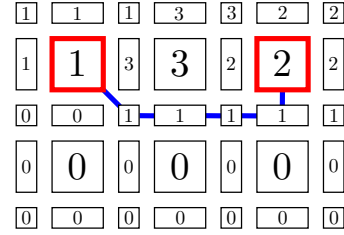
(a) Image scalaire  $u$ .



(b) Image multivoque  $\tilde{u}$ .



(c) Version 3D de  $\tilde{u}$ .



(d) Un chemin minimal dans une image  $\tilde{u} < \tilde{u}$ .

FIGURE 4 – D'une image en niveaux de gris (a) à sa représentation discrète et continue (b,c); une image scalaire (d) donne le chemin minimal.

Un exemple simple de la transformation d'une image en niveaux de gris  $u$ , donnée en Fig. 4(a), en une fonction à valeurs d'intervalles  $\tilde{u}$  est donné en Fig. 4(b). Comme résultat de l'Eq. 9, nous pouvons voir que  $\tilde{u}|_{H_1^n}$  (la partie rose) ressemble à la version multivoque  $\hat{u}$  de l'image originale  $u$ . Le calcul du span est signifié par les triangles gris et olives, respectivement pour les dimensions  $d = 1$  et  $d = 0$ . Par exemple, pour la 1-face à gauche est valuée par  $\text{span}\{0, 1\} = [0, 1]$ , et la 0-face centrale par  $\text{span}\{0, 1, 3\} = [0, 3]$ . Finalement, seules les faces dont la dimension est strictement inférieure à  $n$  peuvent être des intervalles non-dégénérés (elles sont dessinées en orange).

Une version 3D de la représentation discrète à valeurs d'intervalles  $\tilde{u}$  est montrée en Fig. 4(c); on peut voir facilement que c'est un équivalent discret de la surface continue de la Fig. 1(c). Nous définirons l'arbre des formes de telles fonctions  $\tilde{u}$  en Sec. 4.1.



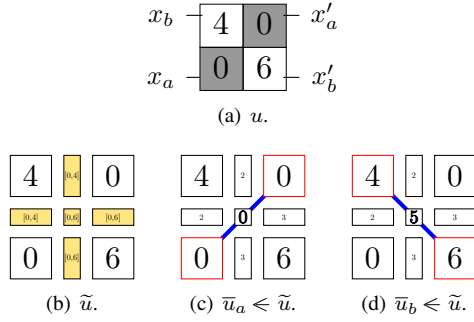


FIGURE 5 – Le point-selle en 2D comme un symptôme de problème en topologie discrète avec  $\tilde{u}$ .

### 3.2 Définition naïve de la pseudo-distance du dahu

En s'appuyant sur la représentation à valeurs d'intervalles  $\tilde{u} : \mathcal{D}_H \subset \mathbb{H}^n \rightarrow \mathbb{I}_Y$  d'une image scalaire  $u : \mathcal{D} \subset \mathbb{Z}^n \rightarrow Y$ , nous définissons la pseudo-distance du dahu par :

$$d_u^{\text{naive}}(x, x') = \min_{\bar{u} \ll \tilde{u}} d_{\bar{u}}^{\text{MB}}(h_x, h_{x'}). \quad (10)$$

Rappelons que la notation  $\bar{u} \ll \tilde{u}$  signifie que  $\forall x, \bar{u}(x) \in \tilde{u}(x)$ , donc l'argument de l'opérateur minimum est une fonction scalaire  $\bar{u} : \mathcal{D}_H \subset \mathbb{H}^n \rightarrow Y$ . Cela signifie qu'en fait nous cherchons un chemin minimal dans le complexe cubique  $\mathcal{D}_H$  (pas dans  $\mathcal{D}$ ), avec la définition classique de la distance de barrière minimum  $d^{\text{MB}}$  (donc, une distance définie sur une fonction scalaire), et en considérant **toutes** les fonctions scalaires  $\bar{u}$  qui sont "incluses" dans la fonction à valeurs d'intervalles  $\tilde{u}$ . La définition de la pseudo-distance du dahu est donc combinatoire par rapport aux images scalaires  $\bar{u}$  "incluses" dans  $\tilde{u}$  (cf. les parties en bleu dans l'Eq. 10). La pseudo-distance du dahu peut être interprétée comme la *meilleure distance de barrière minimum que nous puissions avoir en considérant que la fonction d'entrée est continue*.

La fonction dahu est une pseudo-distance car elle vérifie les propriétés de non-négativité, d'identité, de symétrie et de sous-additivité. De plus, nous avons la propriété suivante :

$$\forall u, \forall x, x', d_u^{\text{naive}}(x, x') \leq d_u^{\text{MB}}(x, x'). \quad (11)$$

Un exemple est donné dans la Fig. 4(a) pour une fonction d'entrée  $u$ , dans la Fig. 4(b) pour sa représentation "continue"  $\tilde{u}$ , et dans la Fig. 4(d) pour une fonction scalaire  $\bar{u} \ll \tilde{u}$ . Un chemin minimal de dahu entre deux points originaux de  $u$  est montré en bleu dans la Fig. 4(d) ; c'est en fait le même chemin que celui représenté sur la surface continue en 3D dans la Fig. 1(c).

### 3.3 Solution d'un problème de topologie discrète

Dans les images 2D discrètes, nous pouvons avoir des points-selles. Un exemple est donné dans la Fig. 5(a), à partir de laquelle nous déduisons la représentation continue (donnée dans la Fig. 5(b)). Afin de calculer les che-

mins minimaux, nous avons  $d_u^{\text{naive}}(x_a, x'_a) = 0$  qui est obtenu avec  $\bar{u}_a$  (Fig. 5(c)), et  $d_u^{\text{naive}}(x_b, x'_b) = 2$  qui est obtenu avec  $\bar{u}_b$  (Fig. 5(d)). Une interprétation de cette situation "dans le monde continu" est la suivante. D'un côté, avoir  $d_u^{\text{naive}}(x_a, x'_a) = 0$  implique non seulement que le niveau dans  $\bar{u}_a$  du point-selle (la 0-face) est 0, mais aussi qu'il y a une ligne de niveau 0 joignant  $x_a$  et  $x'_a$  dans  $\tilde{u}$ . D'un autre côté, puisque nous avons  $u(x_b) = 4$  et  $u(x_b) = 6$ ,  $\bar{u}_b$  considère que le niveau 5 existe entre  $x_b$  et  $x'_b$ , ce qui rentre en contradiction avec la conclusion précédente. Nous avons donc des incohérences si nous considérons deux chemins discrets distincts dans  $u$ , et si nous essayons de les interpréter de façon continue dans  $\tilde{u}$ . Le problème principal ici est que, en 2D, la représentation  $\tilde{u}$  ne peut pas empêcher les lignes de niveaux de différents niveaux de s'intersecter, ce qui arrive dans le cas des points-selles. À partir de cet exemple, nous pouvons tirer une conclusion négative : la représentation  $\tilde{u}$ , comme définie dans l'Eq. 9, ne peut pas vraiment donner une interprétation continue de l'ensemble de tous les chemins dans  $u$  sans qu'il y ait de défauts topologiques.

Une solution à ce problème est d'ajouter une étape intermédiaire qui calcule une "interpolation" de  $u$  qui n'a pas de parties pathologiques comme les points-selles dans le cas 2D. Dans le cas général  $n$ D, ces parties sont nommées *configurations critiques*, et une image sans aucune configuration critique est dite "digitalement bien-composée" (DWC) [2].

Notons par  $u_{\square}$  une interpolation de l'image scalaire  $u : \mathbb{Z}^n \rightarrow Y$ , définie sur l'espace subdivisé  $(\mathbb{Z}/2)^n$ , et prenant ses valeurs soit dans  $Y$  soit dans un autre espace scalaire  $Y'$ . Une représentation de  $u$  continue mais pourtant discrète est maintenant  $\tilde{u}_{\square}$  :

$$(u : \mathbb{Z}^n \rightarrow Y) \xrightarrow{\text{étape 1}} (u_{\square} : (\mathbb{Z}/2)^n \rightarrow Y') \xrightarrow{\text{étape 2}} (\tilde{u}_{\square} : (\mathbb{H}/2)^n \rightarrow \mathbb{I}_{Y'}). \quad (12)$$

Sous l'hypothèse que  $u_{\square}$  est digitalement bien-composée, l'image à valeurs d'intervalles  $\tilde{u}_{\square}$  permet de représenter  $u$  d'une façon continue et discrète, et sans incohérence topologique. Nous dirons que de telles fonctions  $\tilde{u}_{\square}$  sont *cohérentes vis-à-vis des chemins*.

Maintenant nous pouvons fournir une nouvelle définition de la pseudo-distance du dahu, étant donnée une image  $u$  :

$$\forall x, x' \in \mathbb{Z}^n, d_u(x, x') = \min_{\bar{u} \ll \tilde{u}_{\square}} d_{\bar{u}}^{\text{MB}}(h_x, h_{x'}). \quad (13)$$

Par comparaison avec la définition initiale (naïve) donnée par l'Eq. 10, nous avons juste remplacé  $\tilde{u}$  par  $\tilde{u}_{\square}$ .

Plusieurs interpolations à base de subdivision d'images scalaires  $n$ D sont connues pour produire des images DWC. C'est le cas de l'interpolation avec l'opérateur max, utilisé dans [15] pour le calcul quasi-linéaire de l'arbre des formes d'une image scalaire, comme défini par l'Eq. 4. Dans le cas 2D—et pas en  $n$ D avec  $n > 2$ —la seule interpolation *auto-duale et locale* qui vérifie des propriétés d'invariances fortes et qui donne des images DWC est obtenue

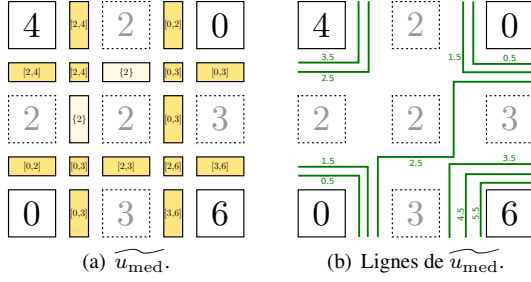


FIGURE 6 – Interpolation d’une fonction à valeurs d’intervalles qui est cohérente vis-à-vis des chemins.

avec l’opérateur médian [15]. Une illustration est montrée dans la Fig. 6(a), après que l’étape 2 ( $u_{\square} \rightarrow \widetilde{u}_{\square}$ ) est appliquée ; la Fig. 6(b) montre que les différentes lignes de niveaux ne se croisent *pas*. Enfin, notons que dans le cas général  $nD$ , une interpolation auto-duale non-locale a été définie [3].

## 4 Calcul de la pseudo-distance du dahu

L’arbre des formes d’une image est aussi nommé carte topographique. Puisque la distance du dahu est liée également à des notions topographiques, l’arbre des formes est un bon candidat comme outil pour calculer une distance du dahu  $d_u(x, x')$ .

### 4.1 L’arbre des formes des fonctions à valeurs d’intervalles

Puisque les interpolations scalaires  $u_{\square}$  sont digitalement bien-composées, l’arbre des formes des fonctions à valeurs d’intervalles  $\widetilde{u}_{\square}$ , c’est-à-dire  $\mathfrak{S}(\widetilde{u}_{\square})$ , comme défini par l’Eq. 6, existe. On peut facilement comprendre que c’est dû au fait que  $\widetilde{u}_{\square}$  est cohérente vis-à-vis des chemins : sachant qu’une ligne de niveau est la frontière d’une forme, puisque deux lignes de niveaux à des niveaux différents ne peuvent pas se croiser, cela implique que les formes sont soit disjointes ou incluses. En fait, l’ensemble  $\mathfrak{S}(\widetilde{u}_{\square})$  vérifie les propriétés suivantes :

- Chaque élément de cet ensemble est une composante connexe de  $\mathbb{H}^n$ , qui est un ensemble ouvert régulier, et qui n’a pas de cavité (par construction, car les formes sont obtenues après bouchage des cavités des composantes issues des seuils).
- L’ensemble  $\mathfrak{S}(\widetilde{u}_{\square})$  est une décomposition auto-duale de  $\mathbb{H}^n$  par rapport à  $u$ .
- La frontière de chaque composante est une ligne de niveau de  $u$ , c’est-à-dire  $\forall S \in \mathfrak{S}(\widetilde{u}_{\square})$  :  

$$\exists \mu \in Y' \text{ tel que } \forall h \in cl(S) \setminus S, \mu \in \widetilde{u}_{\square}(h).$$
- Une fonction qui associe un niveau, noté  $\mu(S)$ , à chaque élément  $S \in \mathfrak{S}(\widetilde{u}_{\square})$  fait que cet ensemble est une représentation de  $\widetilde{u}_{\square}$ . Nous dirons que  $\mu(S)$  est le niveau de la forme  $S$  (nous utiliserons cette fonction dans la prochaine section).

### 4.2 Quand la pseudo-distance du dahu rencontre l’arbre des formes

Intuitivement il est facile de comprendre que le chemin minimal entre deux points d’une image  $u$ , avec la pseudo-distance du dahu, correspond à un chemin de nœuds sur l’arbre des formes  $\mathfrak{S}(\widetilde{u}_{\square})$ . Si nous regardons de nouveau la Fig. 3(b) (gauche), le chemin entre les deux points  $(x, x')$  indiqués par les pastilles rouges dans  $u$  part de la région B, traverse alors A et C, pour se terminer dans la région F. En considérant l’arbre des formes, dans la Fig. 3(b) (droite), ce chemin est exactement le même, et il traverse les lignes de niveaux, dessinées par les traits verts à la fois sur l’image et sur l’arbre. Un tel chemin est minimal car chaque chemin de  $\Pi(x, x')$  doit au moins croiser cet ensemble précis de lignes de niveaux pour relier  $x$  et  $x'$ . Ainsi la pseudo-distance du dahu correspond à la dynamique de niveaux de cet ensemble de lignes. Que ce soit la version continue de la Fig. 1(c) ou sa représentation discrète de la Fig. 4(c), nous pouvons directement lire que la distance entre les points rouges est 1 (les lignes de niveaux sont montrées par les traits verts).

Étant donné un nœud  $t$  d’un arbre, notons  $\text{par}(t)$  le nœud parent de  $t$  dans l’arbre, et  $\text{lca}(t, t')$  le plus petit ancêtre commun des nœuds  $t$  et  $t'$ . Notons  $t_x$  le nœud de  $\mathfrak{S}(\widetilde{u}_{\square})$  qui correspond à  $x \in X$  ; ce nœud correspond à la plus petite forme de  $\mathfrak{S}(\widetilde{u}_{\square})$  contenant  $h_x$ . Nous pouvons concaténer les deux séquences de nœuds :

$$\begin{aligned} \pi_x &= \langle t_x, \text{par}(t_x), \text{par}^2(t_x), \dots, \text{lca}(t_x, t_{x'}) \rangle \text{ et} \\ \pi_{x'} &= \langle t_{x'}, \text{par}(t_{x'}), \text{par}^2(t_{x'}), \dots, \text{lca}(t_x, t_{x'}) \rangle, \end{aligned} \quad (14)$$

pour former la nouvelle séquence :

$$\begin{aligned} \pi(t_x, t_{x'}) &= \pi_x \widehat{\phantom{\pi}} \pi_{x'}^{-1} \\ &= \langle t_x, \dots, \text{lca}(t_x, t_{x'}), \dots, t_{x'} \rangle. \end{aligned} \quad (15)$$

Dans le cas de l’exemple de la Fig. 3(b), le lca des nœuds  $t_B$  et  $t_F$  est  $t_A$ , et la séquence de nœuds est  $\langle t_B, t_A, t_C, t_F \rangle$  (montrée sur la droite) ; elle correspond dans l’arbre au chemin minimal dans l’espace de l’image (montré à gauche).

À chaque forme  $S \in \mathfrak{S}(\widetilde{u}_{\square})$  correspond un nœud, disons  $t_S$ , de l’arbre des formes. Notons par un abus d’écriture  $\mu(t_S) = \mu(S)$ , où  $\mu(S)$  est le niveau de la forme comme défini en Sec. 4.1. Finalement, la pseudo-distance du dahu peut alors se ré-exprimer suivant :

$$d_u(x, x') = \max_{t \in \pi(t_x, t_{x'})} \mu(t) - \min_{t \in \pi(t_x, t_{x'})} \mu(t), \quad (16)$$

où les nœuds considérés et la fonction  $\mu$  sont liés à l’arbre  $\mathfrak{S}(\widetilde{u}_{\square})$ .

En pratique, pour calculer  $d_u(x, x')$  nous avons juste à mettre à jour les valeurs de l’intervalle (min et max de  $\mu$ ) en partant respectivement des nœuds  $x$  et  $x'$ , et en remontant l’arbre jusqu’à leur lca. Par exemple, sur  $\pi_x$  nous calculons

de façon itérative :

$$\begin{aligned}\pi_x^{(0)} &= \langle t_x \rangle \\ \pi_x^{(i+1)} &= \pi_x^{(i)} \frown \langle \text{par}^{i+1}(t_x) \rangle \\ \mu_{\min}(\pi_x^{(i+1)}) &= \min(\mu_{\min}(\pi_x^{(i)}), \mu(\text{par}^{i+1}(t_x))),\end{aligned}\quad (17)$$

et nous faisons de même pour  $\mu_{\max}$ . Finalement,  $d_u(x, x')$  est la longueur du span des deux intervalles, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned}d_u(x, x') &= \max(\mu_{\max}(\pi_x), \mu_{\max}(\pi_{x'})) \\ &\quad - \min(\mu_{\min}(\pi_x), \mu_{\min}(\pi_{x'})).\end{aligned}\quad (18)$$

## 5 Illustration en segmentation d'images de documents

La Figure 7 donne une illustration d'image de document acquise par un téléphone mobile ; elle est tirée de la compétition "SmartDoc" organisée à ICDAR 2015 [4]. Rappelons tout d'abord que l'arbre des formes a déjà été utilisé pour une telle application [8, 24].

À partir d'une image scalaire  $u$  (Fig. 7(a)), nous calculons son arbre des formes  $\mathfrak{S}(\widetilde{u}_{\square})$  (Fig. 7(b)), ce qui permet de calculer très efficacement une carte de distances (Fig. 7(c)) à l'aide de la distance du dahu. On peut voir que le document est maintenant bien contrasté par rapport à son environnement. Une carte de saillance (partitionnement hiérarchique de l'image) correspondant à la distance du dahu est représentée en Fig. 7(d).

Notons que le fait de représenter le domaine de l'image par un complexe permet de considérer l'espace *inter-pixels*, et de représenter à la fois des régions et leurs frontières (voir un exemple dans [17]).

## 6 Travaux liés

En plus des références données jusque là dans cet article, liées soit au contexte de notre travail ou à ses fondements théoriques, plusieurs autres travaux méritent d'être mentionnés. En fait, la notion de chemin sur les nœuds d'un arbre morphologique apparaît aussi dans : [7] afin d'affecter à chaque nœud une étiquette et de réaliser une segmentation basée sur des marqueurs ; [8] pour compter les lignes de niveaux et construire un arbre des formes pour les images multi-variées ; [14] pour calculer une variation curvilinéaire et séparer un objet du fond de l'image. De plus, d'autres travaux s'appuient sur la topologie de l'arbre pour régulariser les images [13, 12].

La notion de barrière utilisée ici sur l'arbre des formes est également proche de celle de la saillance des formes utilisée dans [26]. Enfin, à propos de transformations en distance et d'approches de chemin minimal, le lecteur / la lectrice peut se référer au survol récent [21].

## 7 Conclusion

Nous avons présenté dans cet article une nouvelle pseudo-distance, la distance du dahu, qui est une variante de la distance de barrière minimum (MBD) dans une représentation continue (mais encore discrète) des images. Il y a deux

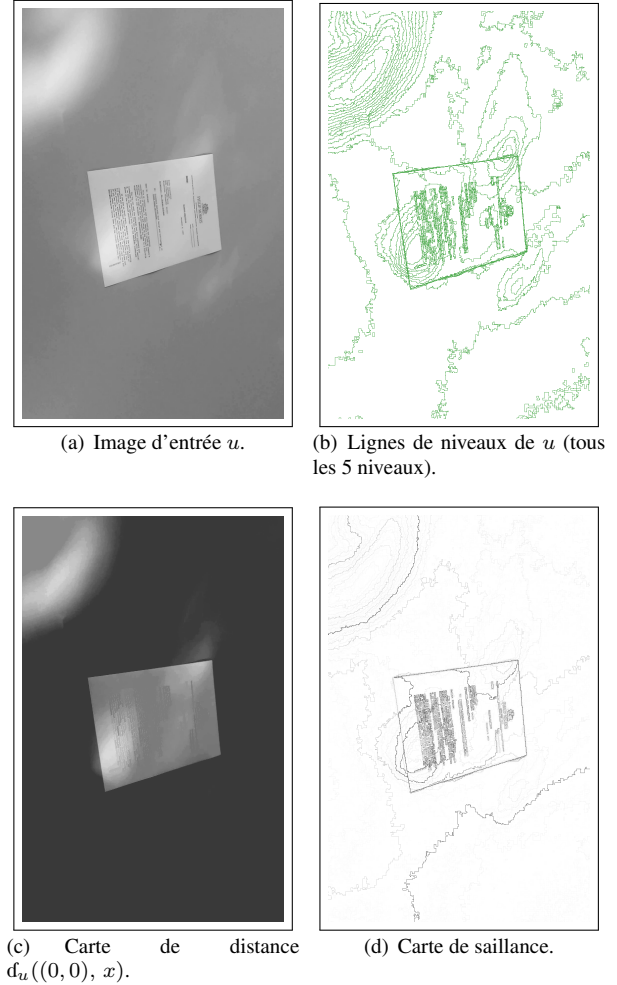


FIGURE 7 – Utilisation de la distance du dahu pour une application de détection de documents.

avantages principaux à cette distance par rapport à la MBD originale :

- Elle considère que les images d'entrées, discrètes, sont en fait définies dans un monde continu, c'est-à-dire, que leur élévation est une surface.
- Le calcul de la distance du dahu pour des couples de points  $(x, x')$  est très *efficace*, grâce au pré-calcul de l'arbre des formes ; de plus, les distances  $d_u(x, x')$  obtenues à l'aide de cet arbre sont *exactes*. Cela contraste avec le calcul efficace mais approché de la MBD donné dans [23].

D'autres intérêts pratiques de la nouvelle distance par rapport à sa définition classique doivent encore faire leur preuve. Néanmoins nous croyons qu'il y a de nombreuses perspectives en terme d'applications, qui sont rendues possible grâce au calcul rapide. Une autre perspective est d'adapter cette distance aux images en couleur ; cela peut être réalisé en utilisant l'arbre des formes pour les images multi-variées défini dans [8].

## Financement

Ce travail a été mené au sein du projet MOBIDEM, qui fait partie des Pôles de Compétitivité “Systematic Paris-Région” et “Images & Réseaux”. Ce projet est financé partiellement par le gouvernement français et ses agences de développement économique.

## Références

- [1] J.-P. Aubin and H. Frankowska. *Set-Valued Analysis*. Birkhäuser, 2009.
- [2] N. Boutry, T. Géraud, and L. Najman. On making  $nD$  images well-composed by a self-dual local interpolation. In *Proc. of Intl. Conf. on Discrete Geometry for Computer Imagery (DGCI)*, volume 8668 of *LNCS*, pages 320–331. Springer, 2014.
- [3] N. Boutry, T. Géraud, and L. Najman. How to make  $nd$  functions well-composed in a self-dual way. In *Proc. of the Intl. Symp. on Mathematical Morphology (ISMM)*, volume 9082 of *LNCS*, pages 561–572. Springer, 2015.
- [4] J. Burie, J. Chazalon, and *et al.* ICDAR 2015 competition on smartphone document capture and OCR (Smart-Doc). In *Proc. of the Intl. Conf. on Document Analysis and Recognition (ICDAR)*, pages 1161–1165, 2015.
- [5] F. Cao, J.-L. Lisani, J.-M. Morel, P. Musé, and F. Sur. *A Theory of Shape Identification*, volume 1948 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 2008.
- [6] E. Carlinet and T. Géraud. A comparative review of component tree computation algorithms. *IEEE Trans. on Image Processing*, 23(9) :3885–3895, 2014.
- [7] E. Carlinet and T. Géraud. Morphological object picking based on the color tree of shapes. In *Proc. of the Intl. Conf. on Image Processing Theory, Tools and Applications (IPTA)*, pages 125–130, 2015.
- [8] E. Carlinet and T. Géraud. MToS : A tree of shapes for multivariate images. *IEEE Trans. on Image Processing*, 24(12) :5330–5342, 2015.
- [9] V. Caselles, B. Coll, and J.-M. Morel. Topographic maps and local contrast changes in natural images. *International Journal of Computer Vision*, 33(1) :5–27, 1999.
- [10] V. Caselles and P. Monasse. *Geometric Description of Images as Topographic Maps*, volume 1984 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, 2009.
- [11] S. Crozet and T. Géraud. A first parallel algorithm to compute the morphological tree of shapes of  $nD$  images. In *Proc. of the IEEE Intl. Conf. on Image Processing (ICIP)*, pages 2933–2937, 2014.
- [12] J. Darbon. Total variation minimization with L1 data fidelity as a contrast invariant filter. In *Proc. of the IEEE Intl. Symp. on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA)*, 2005.
- [13] F. Dibos and G. Koepfler. Total variation minimization by the Fast Level Sets Transform. In *Proc. of the IEEE Workshop on Variational and Level Set Methods in Computer Vision*, pages 179–185, 2001.
- [14] A. Dubrovina, R. Hershkovitz, and R. Kimmel. Image editing using level set trees. In *Proc. of the IEEE Intl. Conf. on Image Processing (ICIP)*, pages 4442–4446, 2014.
- [15] T. Géraud, E. Carlinet, and S. Crozet. Self-duality and discrete topology : Links between the morphological tree of shapes and well-composed gray-level images. In *Proc. of the Intl. Symp. on Mathematical Morphology (ISMM)*, volume 9082 of *LNCS*, pages 573–584. Springer, 2015.
- [16] T. Géraud, E. Carlinet, S. Crozet, and L. Najman. A quasi-linear algorithm to compute the tree of shapes of  $n$ -D images. In *Proc. of the Intl. Symp. on Mathematical Morphology (ISMM)*, volume 7883 of *LNCS*, pages 98–110. Springer, 2013.
- [17] L. D. Huynh, Y. Xu, and T. Géraud. Morphological hierarchical image decomposition based on Laplacian 0-crossings. In *Proc. of the Intl. Symp. on Mathematical Morphology (ISMM)*, volume of *LNCS*. Springer, 2017. To appear.
- [18] L. Mazo, N. Passat, M. Couprie, and C. Ronse. Digital imaging : A unified topological framework. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 44(1) :19–37, 2012.
- [19] P. Monasse and F. Guichard. Fast computation of a contrast-invariant image representation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 9(5) :860–872, 2000.
- [20] L. Najman and T. Géraud. Discrete set-valued continuity and interpolation. In *Proc. of the Intl. Symp. on Mathematical Morphology (ISMM)*, volume 7883 of *LNCS*, pages 37–48. Springer, 2013.
- [21] P. K. Saha, R. Strand, and G. Borgefors. Digital topology and geometry in medical imaging : A survey. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 34(9) :1940–1964, 2015.
- [22] R. Strand, K. C. Ciesielski, F. Malmberg, and P. K. Saha. The minimum barrier distance. *Computer Vision and Image Understanding*, 117 :429–437, 2013.
- [23] W.-C. Tu, S. He, Q. Yang, and S.-Y. Chien. Real-time salient object detection with a minimum spanning tree. In *Proc. of the IEEE Conf. on Computer Vision and Pattern Recognition (CVPR)*, pages 2334–2342, 2016.
- [24] Y. Xu, E. Carlinet, T. Géraud, and L. Najman. Hierarchical segmentation using tree-based shape spaces. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 39(3) :457–469, 2017.
- [25] Y. Xu, T. Géraud, and L. Najman. Connected filtering on tree-based shape-spaces. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 38(6) :1126–1140, 2016.
- [26] Y. Xu, T. Géraud, and L. Najman. Hierarchical image simplification and segmentation based on Mumford-Shah-salient level line selection. *Pattern Recognition Letters*, 83 :278–286, 2016.
- [27] J. Zhang and S. Sclaroff. Exploiting surroundedness for saliency detection : A boolean map approach. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 38(5) :889–902, 2016.
- [28] J. Zhang, S. Sclaroff, Z. Lin, X. Shen, B. Price, and R. Mech. Minimum barrier salient object detection at 80 FPS. In *Proc. of the Intl. Conf. on Computer Vision (ICCV)*, pages 1404–1412, 2015.